

## Equations logarithmiques et exponentielles

$\log_a x$  et  $a^x$  sont des fonctions injectives:

$$x = y \iff a^x = a^y \quad (1)$$

$$x = y \iff \log_a x = \log_a y \quad \text{avec } x, y > 0 \quad (2)$$

La résolution d'une équation simple revient donc à réécrire celle-ci sous la forme  $a^x = a^y$  ou  $\log_a x = \log_a y$ . Pour ce faire, il est souvent utile d'utiliser les propriétés des fonctions logarithmes

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $3^{1-x} - \frac{1}{9} = 0$

On réécrit l'équation sous la forme  $a^x = a^y$ , la base étant ici égale à 3

$$3^{1-x} = 3^{-2}$$

en utilisant (1), on a alors

$$1 - x = -2$$

et donc

$$x = 3$$

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\log_2 x + 1 = 0$

On réécrit l'équation sous la forme  $\log_a x = \log_a y$ , la base étant ici égale à 2

$$\log_2 x = -1$$

sachant que  $\log_a a^x = x$ ,

$$\log_2 x = \log_2 2^{-1}$$

en utilisant (1), on a alors

$$x = \frac{1}{2}$$

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\log_3 x - 2 \log_3(x - 2) = 1$

Réécrivons l'équation sous la forme suivante

$$\log_3 x = 2 \log_3(x - 2) + 1$$

Transformons chaque terme en un logarithme, sachant que  $\log_3 3 = 1$

$$\log_3 x = 2 \log_3(x - 2) + \log_3 3$$

En utilisant la propriété  $\log_a x^n = n \log_a x$ , on obtient

$$\log_3 x = \log_3(x - 2)^2 + \log_3 3$$

Ramenons-nous à la forme  $\log_a x = \log_a y$  en utilisant la propriété  $\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$

$$\log_3 x = \log_3(3(x - 2)^2)$$

$$\begin{aligned}x &= 3(x-2)^2 \\x &= 3(x^2 - 4x + 4) \\3x^2 - 13x + 12 &= 0\end{aligned}$$

et

$$x = 3 \text{ ou } x = \frac{4}{3}$$

Les conditions d'existence sont  $\begin{cases} x > 0 \\ x > 2 \end{cases}$  donc il faut que  $x > 2$

La solution finale est donc  $x = 3$

Dans le cas d'une équation plus compliquée, on peut parfois se ramener à une équation algébrique en posant  $y = a^x$  ou  $y = \log_a x$

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $2^{2^{x+2}} = 17 \times 2^x - 4$

On réécrit l'équation sous la forme d'une équation du second degré

$$4 \cdot 2^{2^x} - 17 \cdot 2^x + 4 = 0$$

on pose alors  $y = 2^x$  et l'équation devient

$$4y^2 - 17y + 4 = 0$$

cette équation a deux solutions:

$$y = 4 \text{ ou } y = \frac{1}{4}$$

c'est-à-dire

$$2^x = 4 \text{ ou } 2^x = \frac{1}{4}$$

$$2^x = 2^2 \text{ ou } 2^x = 2^{-2}$$

et

$$x = 2 \text{ ou } x = -2$$

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\ln^2 x - \ln x = 6$

On réécrit l'équation sous la forme d'une équation du second degré

$$\ln^2 x - \ln x - 6 = 0$$

on pose alors  $y = \ln x$  et l'équation devient

$$y^2 - y - 6 = 0$$

cette équation a deux solutions:

$$y = -2 \text{ ou } y = 3$$

c'est-à-dire

$$\ln x = -2 \quad \text{ou} \quad \ln x = 3$$

sachant que  $\ln x = y \iff x = e^y$ , on a

$$x = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \quad \text{ou} \quad x = e^3$$

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $e^x - \frac{4}{e^x} + 3 = 0$

On réécrit l'équation sous la forme d'une équation du second degré

$$e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$$

on pose alors  $y = e^x$  et l'équation devient

$$y^2 + 3y - 4 = 0$$

cette équation a deux solutions:

$$y = 1 \quad \text{ou} \quad y = -4$$

c'est-à-dire

$$e^x = 1 \quad \text{ou} \quad e^x = -4$$

la 1ère égalité donne  $x = 0$  et la seconde est clairement impossible, l'image de la fonction  $e^x$  étant  $\mathbb{R}_0^+$ , elle ne peut prendre des valeurs négative.

nous avons donc une seule solution

$$x = 0$$

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\log(x+1) - \log x = \log(x-2)$

L'argument d'une fonction logarithme devant être strictement positif, nous avons comme CE:

$$\begin{cases} x+1 > 0 & (1) \\ x > 0 & (2) \\ x-2 > 0 & (3) \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x > -1 & (1) \\ x > 0 & (2) \\ x > 2 & (3) \end{cases}$$

C'est-à-dire qu'il faut que  $x > 2$ .

On réécrit l'équation sous la forme suivante

$$\log(x+1) = \log x + \log(x-2)$$

Ramenons-nous à la forme  $\log_a x = \log_a y$  en utilisant la propriété  $\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$

$$\log(x+1) = \log(x^2 - 2x)$$

en utilisant l'injectivité, on a alors

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

cette équation a deux solutions:

$$x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \approx -0.302776 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \approx 3.30278$$

Vu la C.E.  $x > 2$ , la seule solution de l'équation est

$$x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \approx 3.30278$$

Macformatmath.net  
doing maths on your Mac