

Logarithmes et exponentielles

Exercices récapitulatifs

I. Traduire sous forme de logarithme

a) $0.001 = 10^{-3}$

b) $2 = \sqrt[3]{8}$

c) $27 = 81^{3/4}$

d) $\frac{1}{4} = 32^{-2/5}$

e) $u = 10^t$

f) $x = e^y$

II. Traduire sous forme exponentielle

a) $\log_3 27 = 3$

b) $\log_{1/5} \sqrt{5} = \frac{-1}{2}$

c) $\log y = x$

d) $\ln x = y$

III. Calculer sans l'aide d'une calculatrice

a) $\log 0.001$

b) $\log_3 \sqrt{27}$

c) $\log_4 64$

d) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$

e) $\log_2 6 - \log_2 3$

f) $\log_3(-27)$

g) $\log 5 + \log 2$

h) $\log_3 36 - \log_9 16$

i) $3 \log_6 2 - \log_6 3 + 2 \log_6 \frac{3}{2}$

IV. Evaluer à l'aide d'une calculatrice à 4 chiffres significatifs

a) $\ln \pi$

b) $5 \cdot 10^{1.2}$

c) $7^{-\sqrt{3}}$

d) $\log(-3)$

e) $\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2}$

f) $\log_2 15$

V. Trouver, sans aide de la calculatrice, le meilleur encadrement par deux nombres entiers des réels suivants.

a) $\log_2 20$

b) $\log_3 10$

c) $\log 1254$

d) $\ln 3$

e) $\sqrt{-3}$

VI. Résoudre à l'aide de la définition du logarithme.

a) $\log_2 x = -1$

b) $\log_3 \frac{1}{x} = -2$

c) $\log_x 8 = -3$

d) $\log_9 x = \frac{1}{4}$

VII. Décomposer à l'aide des propriétés des logarithmes.

a) $\log_a(x y^3)$

b) $\log_a\left(\frac{r}{u^2}\right)$

c) $\log \sqrt{a^3 b}$

d) $\ln \frac{a^3 b^2}{c}$

e) $\log_a \frac{x}{\sqrt{y^3 z}}$

VIII. Exprimer sous forme d'un seul logarithme.

a) $\frac{1}{3} \log_a x - 2 \log_a y + \frac{1}{2} \log_a z$

b) $3 \log x + 2 \log y - \frac{1}{4} \log z$

c) $3 \left(\frac{1}{2} \ln u - 5 \ln t \right)$

d) $2 \log_2(x-1) - \log_2 x$

e) $3 \log_2 x + 4 \log_4(x+2)$

IX. Décomposer à l'aide des propriétés des logarithmes.

a) $\log_a \frac{\sqrt{x-3}}{x^2}$

b) $\log((x-2)^2 (x+3)^3)$

c) $\ln \frac{\sqrt{2x-1}}{(1+x)^2}$

X. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\frac{5^{x-1}}{5^{3-x}}$

b) $\left(\frac{e^{-x}}{e^{2x}} \right)^{2x}$

c) $\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

XI. Sachant que $\ln 2 = 0.693147$ et $\ln 5 = 1.60944$, évaluer sans l'aide d'une calculatrice

a) $\ln 10$

b) $\ln 0.4$

c) $\ln \sqrt[3]{20}$

XII. Résoudre dans \mathbb{R}

1) $4^3 x - x^2 - 16 = 0$

2) $3^{x-1} = 9^{1-2x}$

3) $e^{-x} - e^{x^2} = 0$

4) $(e^x)^2 - 16 = 0$

5) $3^x = 6^{x-1}$

6) $10^{2x} + 5 \times 10^x - 6 = 0$

7) $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$

8) $e^{1-x} + e^x = 0$

9) $3^{1-x} + 3^x - 4 = 0$

10) $3^{2x-1} = 7^{5-x}$

XIII. Résoudre

1) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) = -1$

2) $\ln(x+3) - \ln(2x-1) = 0$

3) $\ln(3x^2) = \ln(9x) + 2$

4) $\log_2(x+3) - \log_2(x) = 2$

5) $\log(\ln(x)) = 1$

6) $\log(x-2) + 1 = \log(2x+1)$

7) $\ln(x^2-3) = 2 \ln(x-1)$

8) $\log(2x+1) - \log(x-1) = \log x$

9) $3 \ln^2(x) - 2 \ln(x) = 1$

10) $\ln^2(x) = \ln(x^2)$

11) $\ln^3(x) + \ln(x) - 2 = 0$

XIV. Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R}

1) $\frac{1}{4} - 4^{x+1} \geq 0$

2) $e^{2x} - 9 \leq 0$

3) $\frac{e^x+1}{e^x-1} < 0$

4 | *exrecaplog_sol.nb*
4) $-3e^{2x} + e^{4x} + 2 < 0$

5) $\frac{1}{e^x + 1} - 2 > 0$

6) $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \leq 0$

7) $\frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) > 0$

8) $2^x + \frac{1}{1-2^x} > 0$

9) $9^x - 3^{x+1} - 4 \geq 0$

10) $3^{2x} \geq 5^{x-1}$

XV. Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R}

1) $\log_2(x+1) - 2 \leq \log_2(3x)$

2) $\log_4(x-1) \geq \log_2(3)$

3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 2) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x) - 1$

4) $\log^2 x + \log x - 2 < 0$

5) $\frac{\ln(x)}{1+\ln(x)} \geq 0$

6) $\log_7(2x-1) > -2$

7) $\ln(-3+2x) - \ln(-4+x) < 2\ln(5)$

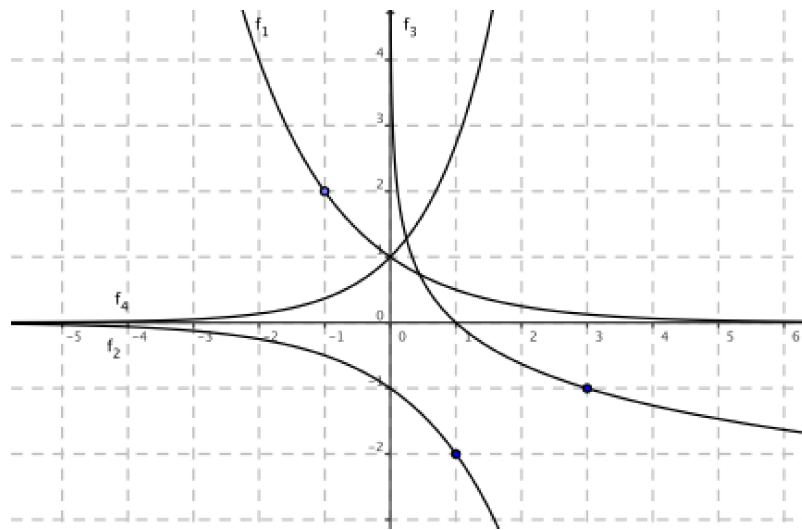
8) $\ln(1+x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) < 0$

9) $\log_2(x-2) - \log_4(x) \geq 0$

10) $\ln^2(x) - 4 \geq 0$

XVI. Identifier les fonctions suivantes

$f(x) = e^x$ $g(x) = \log_{1/3} x$ $b(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $i(x) = -2^x$



XVII. Tracer le graphe des fonctions suivantes. Préciser leur domaine, leur image, leurs éventuelles racines et asymptotes.

- a) $y = 2^{x+1}$ b) $f(x) = \log_3(1 - x)$ c) $f(x) = 3^{2+x} - 1$ d) $f(x) = 2 + \ln(2x - 1)$

XVIII. Pour les fonctions suivantes, calculer $f(-2)$

- a) $f(x) = 2^{x+1}$ b) $f(x) = \log_3(1 - x)$ c) $f(x) = 3^{2+x} - 1$ d) $f(x) = 2 + \ln(2x - 1)$

XIX. Déterminer la réciproque des fonctions suivantes et préciser si la réciproque est une fonction.

- a) $f(x) = 2^{x+1}$ b) $f(x) = \log_3(1 - x)$ c) $f(x) = 3^{2+x} - 1$ d) $f(x) = 2 + \ln(2x - 1)$

- e) $f(x) = 2 \ln(x + 1)$ f) $f(x) = 3^{2x} - 4$ g) $f(x) = 3 - \ln(2x - 5)$ h) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

XX. Prenons une feuille de papier de 0,1 mm d'épaisseur. Plions-la en 2, puis encore en 2, puis encore en 2. Quel est le nombre de pliages nécessaire pour obtenir une épaisseur de 1 mètre? Utilisez la calculatrice!

On lance deux dés. Combien de lancers de ces dés faut-il exécuter pour que la probabilité d'obtenir un "double six" soit

- a) minimum de 0,5?
b) plus grande que 0,9?

Une usine produit 300 000 unités la première année. La croissance annuelle est de 5%. Après combien d'années la production atteindra-t-elle les 500 000 unités ?

Remarque à propos des pourcentages:

a) augmenter de i % un nombre revient à multiplier celui-ci par $(1 + \frac{i}{100})$
exemple: augmenter 700 de 8% revient à calculer $700 \cdot 1,08 = 756$

b) diminuer de i % un nombre revient à multiplier celui-ci par $(1 - \frac{i}{100})$
exemple: diminuer 700 de 8% revient à calculer $700 \cdot 0,92 = 644$

XXI. Le nombre d'habitants d'une ville A augmente de 20 % tous les 3 ans. Actuellement, il est de 240 000 habitants.

- a) Quel est le taux d'augmentation annuel ?
b) Dans combien d'années y aura-t-il plus de 500 000 habitants ?

Déterminer la parité

- 1) $\log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ 2) $\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

XXII. Calcule et interprète graphiquement

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^x$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x}$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$
 d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0.2^{x-1}$

XXIII. Dérive les fonctions suivantes

- 1) $x e^x$ 2) $e^{\sin(x)}$ 11) $\ln \sqrt{x^2 - 3}$
 3) $\sqrt{1 - e^{2x}}$ 4) $e^{\text{Arccos}(x)}$ 12) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$
 5) $e^{\text{tg}(3x)}$ 6) $\cos(\ln(x))$ 13) $\frac{e^{3x-1}}{e^x}$
 7) 3^{2x-5} 8) $\log_2(x^3)$
 9) $\ln^2(3x)$ 10) $2^{\text{Arcsin}(x)}$

XXIV. Etudier les fonctions suivantes

- 1) $\frac{e^x}{x}$ 2) $x^2 e^x$ 3) e^{-x^2}
 4) $e^{2x} - 2e^x$ 5) $\frac{\ln(x)}{x}$ 6) $\ln(|x^2 - 1|)$
 7) $\frac{1}{\ln^2(x)-4}$ 8) $x - \ln(x-1)$ 9) $\sqrt{1 - e^x}$ 10) $x \ln(x)$